A Vocabulaire

Une équation est une égalité qui contient une lettre appelée inconnue (celle-ci peut apparaître plusieurs fois).

Exemples : $x + 2 = 5$ $3x - 1 = -4$ $-5x = 15$

Une équation comprend deux membres séparés par le symbole d'égalité.

Exemple :

$$\underbrace{5x + 10}_{1^{er}\text{ membre}} \underset{\text{symbole d'égalité}}{=} \underbrace{3x + 4}_{2^{e}\text{ membre}}$$

Résoudre une équation, c'est déterminer la valeur de l'inconnue qui vérifie l'égalité; cette valeur est appelée solution de l'équation.

Vérifier la solution d'une équation, c'est remplacer dans l'équation l'inconnue par la valeur trouvée, calculer chacun des deux membres et constater l'égalité.

Exemple

-3 est la solution de l'équation $5x + 10 = 3x + 4$

car, $5 . (-3) + 10 = 3 . (-3) + 4$

$-15 + 10 = -9 + 4$

$-5 = -5$

B Propriétés des égalités

Si on ajoute (retire) un même nombre aux deux membres d'une égalité, alors on obtient une nouvelle égalité.

Exemples : Si $a = b$, alors $a + 3 = b + 3$

Si $c = d$, alors $c - 5 = d - 5$

Si on multiplie (divise) par un même nombre non nul les deux membres d'une égalité, alors on obtient une nouvelle égalité.

Exemples

Si $a = b$, alors $4 . a = 4 . b$

$4a = 4b$

Si $-8c = 6d$, alors $-8c : (-2) = 6d : (-2)$

$4c = -3d$

C Méthodes de résolution

1. Équations du type x + a = b

Pour résoudre une équation du type $x + a = b$, il faut neutraliser le terme « gêneur » en ajoutant son opposé aux deux membres.

Exemples

$$-3\left[\begin{array}{c} x+3=-5 \\ x+3-3=-5-3 \end{array}\right]-3 \qquad +2\left[\begin{array}{c} 4=x-2 \\ 4+2=x-2+2 \end{array}\right]+2$$

$$x=-8 \qquad\qquad 6=x$$

Remarque : la première ligne de chaque résolution peut ne pas être écrite.

2. Équations du type ax = b et $\frac{x}{a} = b$

Pour résoudre une équation du type $ax = b$, il faut neutraliser le facteur « gêneur » multiplicateur en divisant les deux membres par celui-ci.

Exemples

$$:6\left[\begin{array}{c} 6\,.\,x=24 \\ 6x:6=24:6 \end{array}\right]:6 \qquad :(-7)\left[\begin{array}{c} -7\,.\,x=23 \\ -7x:(-7)=23:(-7) \end{array}\right]:(-7)$$

$$x=4 \qquad\qquad x=\frac{-23}{7}$$

$$:3\left[\begin{array}{c} 3x=\frac{7}{6} \\ 3x:3=\frac{7}{6}:3 \end{array}\right]:3 \qquad :(-2)\left[\begin{array}{c} -9=-2x \\ (-9):(-2)=-2x:(-2) \end{array}\right]:(-2)$$

$$x=\frac{7}{18} \qquad\qquad \frac{9}{2}=x$$

Pour résoudre une équation du type $\frac{x}{a} = b$, il faut neutraliser le facteur « gêneur » diviseur en multipliant les deux membres par celui-ci.

Exemples

$$.3\left[\begin{array}{c} \frac{x}{3}=5 \\ \frac{x}{3}.3=5.3 \end{array}\right].3 \qquad .4\left[\begin{array}{c} \frac{-5}{9}=\frac{x}{4} \\ \frac{-5}{9}.4=\frac{x}{4}.4 \end{array}\right].4$$

$$x=15 \qquad\qquad \frac{-20}{9}=x$$

Remarque : la première ligne de chaque résolution peut ne pas être écrite.

3. Équations du type $\frac{ax}{b} = c$ et $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$

Pour résoudre une équation d'un de ces deux types, il faut neutraliser deux nombres : un facteur multiplicateur (a) et un facteur diviseur (b).
Il est conseillé de neutraliser d'abord le facteur diviseur.

Exemples

$$\cdot 5 \left[\begin{array}{c} \dfrac{3x}{\mathbf{5}} = 6 \\[2ex] \dfrac{3x}{5} \cdot 5 = 6 \cdot 5 \end{array} \right] \cdot 5$$

$$: 3 \left[\begin{array}{c} \mathbf{3}x = 30 \\[2ex] 3x : 3 = 30 : 3 \end{array} \right] : 3$$

$$x = 10$$

$$\cdot 3 \left[\begin{array}{c} \dfrac{2x}{\mathbf{3}} = \dfrac{5}{7} \\[2ex] \dfrac{2x}{3} \cdot 3 = \dfrac{5}{7} \cdot 3 \end{array} \right] \cdot 3$$

$$: 2 \left[\begin{array}{c} \mathbf{2}x = \dfrac{15}{7} \\[2ex] 2x : 2 = \dfrac{15}{7} : 2 \end{array} \right] : 2$$

$$x = \frac{15}{14}$$

$$\cdot 2 \left[\begin{array}{c} \dfrac{-x}{\mathbf{2}} = 4 \\[2ex] \dfrac{-x}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 2 \end{array} \right] \cdot 2$$

$$: (-1) \left[\begin{array}{c} -x = 8 \\[2ex] (-x) : (-1) = 8 : (-1) \end{array} \right] : (-1)$$

$$x = -8$$

$$\cdot 7 \left[\begin{array}{c} \dfrac{4}{5} = \dfrac{-x}{\mathbf{7}} \\[2ex] \dfrac{4}{5} \cdot 7 = \dfrac{-x}{7} \cdot 2 \end{array} \right] \cdot 7$$

$$: (-1) \left[\begin{array}{c} \dfrac{28}{5} = -x \\[2ex] \dfrac{28}{5} : (-1) = (-x) : (-1) \end{array} \right] : (-1)$$

$$\frac{-28}{5} = x$$

Remarque : les deuxième et quatrième lignes de chaque résolution peuvent ne pas être écrites.

4. Équations du type ax + b = c

Pour résoudre une équation du type ax + b = c, on neutralise d'abord le terme « gêneur », puis le facteur « gêneur ».

Exemples

$$\begin{array}{rcl} -8 & 2x + \mathbf{8} = 18 & -8 \\ & 2x = 18 - 8 & \\ :2 & \mathbf{2}x = 10 & :2 \\ & x = 10 : 2 & \\ & x = 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} +6 & -5x - \mathbf{6} = 9 & +6 \\ & -5x = 9 + 6 & \\ :(-5) & \mathbf{-5}x = 15 & :(-5) \\ & x = 15 : (-5) & \\ & x = -3 & \end{array}$$

Remarques : Un terme « gêneur » est relié à l'inconnue par une somme.
Un facteur « gêneur » est relié à l'inconnue par un produit.

5. Équations du type ax + b = cx + d

Pour résoudre une équation du type ax + b = cx + d, il faut effectuer des neutralisations successives afin d'obtenir une équation du type ax = b.

Exemple

On neutralise d'abord le terme en "x", généralement celui qui a le coefficient le plus petit.

$$\begin{array}{rcl} -3x & 5x + 10 = \mathbf{3x} + 4 & -3x \\ & 5x - 3x + 10 = 4 & \end{array}$$

On neutralise ensuite le terme indépendant de l'autre membre.

$$\begin{array}{rcl} -10 & 2x + \mathbf{10} = 4 & -10 \\ & 2x = 4 - 10 & \end{array}$$

On obtient une équation du type ax = b

On neutralise enfin le facteur multiplicateur « gêneur ».

$$\begin{array}{rcl} :2 & \mathbf{2}x = -6 & :2 \\ & 2x : 2 = -6 : 2 & \\ & x = -3 & \end{array}$$

Remarque : les deuxième, quatrième et sixième lignes de chaque résolution peuvent ne pas être écrites.

Variante : les deux premières neutralisations peuvent se faire en une seule étape.

On repère le terme en « x » que l'on veut neutraliser et le terme indépendant de l'autre membre.

On neutralise ces deux termes dans la même étape.

$$\begin{array}{rcl} -3x & 5x + \mathbf{10} = \mathbf{3x} + 4 & -3x \\ -10 & & -10 \\ & 5x - 3x = 4 - 10 & \end{array}$$

On obtient une équation du type ax = b.

On neutralise enfin le facteur multiplicateur « gêneur ».

$$\begin{array}{rcl} :2 & 2x = -6 & :2 \\ & 2x : 2 = -6 : 2 & \\ & x = -3 & \end{array}$$